EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

32E JAARGANG 1956/57
VII — 1 APRIL 1957

INHOUD

ERVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-DJAKARTA

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EEN ANDERE SCHOOLBEHANDELING VAN DE OPPERVLAKTE VAN DE CIRKEL

door

S. J. Geursen

In een uitgebreid artikel in „Euclides" [1]) bespreekt Dr. J. Koksma de wijze waarop in de meeste leerboeken voor het V.H.M.O. het theorema van de oppervlakte en de omtrek van de cirkel wordt behandeld. Het is een onderdeel van een beschouwing van meer algemene strekking, nl. over het limietbegrip.

Het toeval wilde, dat, toen dit artikel verscheen, Dr. H. Turkstra en ondergetekende juist bezig waren de laatste hand te leggen aan een op stapel staand leerboek. Wij waren echter nog in de gelegenheid gebruik te maken van de waardevolle opmerkingen en suggesties door Dr. Koksma gemaakt en gedaan.

Zodoende ontstond een wijze van behandeling, die o.i. tot op zekere hoogte nieuw kan worden genoemd of althans op dat ogenblik kon worden genoemd. Misschien zijn er inmiddels nieuwe werkjes of herdrukken verschenen, waarin min of meer hetzelfde is gedaan, al is ons op dit ogenblik geen voorbeeld bekend, waarbij dit bewust is geschied.

Men neme hierbij in aanmerking, dat dit artikel door verschillende oorzaken met zeer grote vertraging is geplaatst.

Niettemin lijkt mij de kwestie, waar het om gaat, ook nu nog actueel en in ieder geval belangrijk.

In het onderstaande zal ik trachten te geven:

1e. een samenvatting van het nieuwe in de opvattingen van de heer Koksma (dit tot beter begrip van het volgende) in de vorm van een reeks *algemene beschouwingen*;

2e. een voorbeeld van *praktische toepassing* hiervan, in een leerboek met een bepaalde opzet [2]).

Een stukje theorie en een stukje praktijk dus.

1e. *Algemene beschouwingen.*

1. De heer Koksma maakt bezwaar tegen het „onbeperkt" of „onbepaald", „steeds", „voortdurend" of zelfs „onophoudelijk"

[1]) 26e jaargang (1950–'51), nr. 5/6, blz. 261, met name blz. 281 en volgende.

[2]) Dr. H. Turkstra en S. J. Geursen, Kern der Vlakke Meetkunde, Wolters.

toenemen van het aantal zijden, eenvoudig, omdat dit alles niet nodig is. Dat de „naderings"-suggestie tot niets nut is, is feitelijk de mening van de heer K., al wil hij die niet te sterk poneren (blz. 273). Deze „kan" dus vervallen.

2. De strenge epsilon-definitie is voldoende. Deze dient niet gepaard te gaan met of gevolgd te worden door „naderings"-beschouwingen, zoals soms schijnt te geschieden.

3. De „nadering" geschiedt gewoonlijk in stappen, waarbij elke stap nodig is voor de daarop volgende, zodat er geen kan worden overgeslagen. De hieraan verbonden steeds herhaalde *rekenwijze* is inderdaad soms nodig, bijv. bij de ontwikkeling van $\sqrt{2}$, maar soms ook niet, bijv. bij de bepaling van de oppervlakte van de cirkel.

4. De „monotonie" van de rij „voortdurend groter" wordende oppervlakten is wel een belangrijk convergentie-kenmerk en dus essentieel, maar behoeft niet uitdrukkelijk bewust te zijn (blz. 282). Het behandelen van die monotonie is dus niet nodig.

5. Wanneer men (wat in sommige leerboeken gebeurt) de strenge behandeling geheel aan de algebra overlaat en de resultaten als vanzelfsprekend gebruikt of suggererenderwijze aannemelijk tracht te maken, komt er van helder inzicht niets terecht (blz. 282). Het gaat hier om die onderwerpen, waarbij limieten worden gebruikt, voordat ze in de algebra speciaal aan de orde zijn geweest, zoals het geval is met de oppervlakte van de cirkel.

6. De meeste boeken beginnen met het bewijzen van de ongelijkheid

$$_iO_n < {}_iO_{2n} \ (< C) < {}_0O_{2n} < {}_0O_n.$$

Dit gedeelte kan geheel vervallen. Het wordt niet gebruikt.

7. De meeste boeken geven een tabel van oppervlakten van in- en omgeschreven regelmatige veelhoeken met een voortdurend verdubbelend aantal zijden en in een bepaald aantal decimalen.

Het is niet in te zien, dat al die oppervlakten moeten worden berekend, als men direct de het laatst genoemde zonder hulp van de voorafgaande kan berekenen. En dit is speciaal het geval, als men van de goniometrie gebruik maakt. Ook de tabel kan dus vervallen.

8. Men behoeft, als men n dan steeds groter wil maken, niet per sé te verdubbelen. Het doet er niet toe, op welke wijze n groter wordt, als n maar groter wordt dan zeker getal (epsilon-definitie).

9. Men kan van twee beginselen uitgaan, nl. dat het begrip „oppervlakte van een cirkel" gedefinieerd moet worden of dat dit begrip zonder meer duidelijk is.

10. Men kan uitgaan van de oppervlakte en daaruit de omtrek afleiden of omgekeerd, naar verkiezing.

In het bovenstaande heb ik getracht de hoofdzakeu van het betoog van de heer Koksma weer te geven, soms door min of meer „vrije" citaten, soms met eigen woorden, steeds met de bedoeling beknopt te blijven. Wie het meer precies wil weten, leze het artikel zelf.

2e. De praktische toepassing.

Daar de schrijvers van het in een noot genoemde boekje zich in hoofdtrekken met de opvattingen van de heer Koksma konden verenigen, stonden zij voor de taak deze algemene beschouwingen in de daad om te zetten.

In het algemeen kan dit natuurlijk op verschillende wijzen geschieden, afhankelijk van de uitgangspunten, die bij het schrijven van een bepaald leerboek hebben gegolden.

Ik geef hier de door ons gekozen praktische uitwerking (op enkele bijkomstige punten iets gewijzigd). De bedoeling is de belangstellende lezer te laten zien, dat het onderwerp zich nu toch wel anders (o.i. ook eenvoudiger, beknopter en duidelijker) laat behandelen, dan tot nu toe mogelijk was. Misschien ook nog wel aantrekkelijker voor de leerling.

Voor mijn gevoel is de oude, uitgesleten behandeling van de oppervlakte van de cirkel nu weer eens flink opgefrist en (naar ik hoop) voor menige collega een aantrekkelijk onderwerp om zich opnieuw in te verdiepen. Wij hebben de didaktische kant van de zaak voorop gesteld, anderen zullen zich misschien meer aangetrokken voelen tot de strengheid van behandeling.

Hier volgt dan de uitwerking. Voor een goed begrip moet ik de door ons gevolgde uitgangspunten (die voor het gehele werkje hebben gegolden) wel even vermelden.

Deze zijn:

1. Het voor de leerling zo duidelijk en zo aantrekkelijk mogelijk zijn, desnoods ten koste van de strengheid.

2. De stof moet zo kort en zo eenvoudig mogelijk behandeld worden.

3. Het begrip oppervlakte wordt zonder meer duidelijk geacht en behoeft niet te worden gedefinieerd.

4. Een voorlopige, afgeronde behandeling voor leerlingen, die nooit van een „limiet" hebben gehoord.

5. Een wat dieper ingaan op de moeilijkheden, hetzij in een later stadium, hetzij voor leerlingen, die hiervoor rijp geacht kunnen worden.

6. Een exacte weergave van de resultaten voor die leerlingen, die

het limietbegrip op de gebruikelijke wijze hebben gehad en in de gebruikelijke vorm [1]).

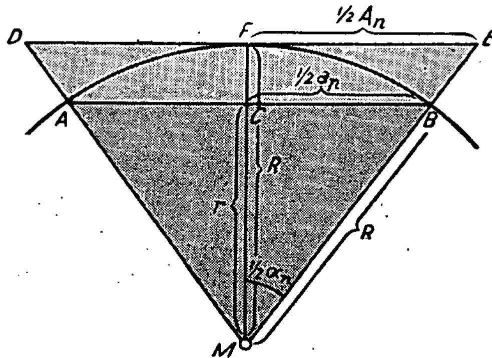
De behandeling bestaat nu uit drie delen. Men kan — al dan niet voorlopig — volstaan met het eerste, zeer korte en eenvoudige deel.

Tenslotte nog een wat eigenaardig verzoek aan de lezer. Van kindsbeen hebben we geleerd aandacht te schenken aan *hetgeen er staat*. Ik zou U nu eens willen verzoeken bij het lezen van het onderstaande in de eerste plaats aandacht te schenken aan *hetgeen weggelaten is*, hierbij sommige van de in de „Algemene Beschouwingen" genoemde punten nagaande.

OPPERVLAKTE VAN DE CIRKEL

I.

We willen trachten de oppervlakte C van een cirkel met straal R te berekenen. We denken ons in en om de cirkel een regelmatige n-hoek beschreven. De oppervlakten hiervan worden respektievelijk aangeduid met ${}_iO_n$ en ${}_oO_n$.



Uit de figuur blijkt, dat voor elke waarde van n geldt

$${}_iO_n < C < {}_oO_n \quad \ldots\ldots \quad \text{I}$$

Nu is $${}_iO_n = n \times \text{opp.}\ \triangle\ \text{MAB}$$

$$= n \times \tfrac{1}{2}R^2 \sin \alpha_n = n \times \tfrac{1}{2}R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

$$\frac{{}_iO_n}{{}_oO_n} = \frac{MC^2}{MF^2} = \frac{MC^2}{MB^2} = \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha_n = \cos^2 \frac{180^\circ}{n}.$$

[1]) De gebruikelijke vorm bevat o.a. het symbool

$$\lim_{n \to \infty} {}_iO_n .$$

De hierin voorkomende pijl met het oneindigheidsteken geeft toch weer de min of meer gewraakte „voortdurende toename" aan. Wij vonden het niet op onze weg liggen, hierop nader in te gaan. Men zie hiervoor Dr. J. Koksma, Het limietbegrip II, Euclides 27e jaargang nr. 5/6 blz. 15.

Dus $\quad {}_oO_n = \dfrac{{}_iO_n}{\cos^2 \dfrac{180^\circ}{n}}.$

De figuur wekt het vermoeden, dat voor grote waarden van n (dus voor kleine waarden van $\alpha_n = \dfrac{360^\circ}{n}$) ${}_oO_n$ en ${}_iO_n$ weinig van elkaar en dus van C zullen verschillen.

Als voorbeeld nemen wij $n = 180$.

Met behulp van tafels in 7 decimalen vindt men op eenvoudige wijze

$$\left.\begin{aligned} {}_iO_{180} &= 180 \times \tfrac{1}{2}R^2 \sin \frac{360^\circ}{180} = 90\, R^2 \sin 2^\circ = 3{,}140955\ R^2 \\ {}_oO_{180} &= \frac{{}_iO_{180}}{\cos^2 \dfrac{180^\circ}{180}} = \frac{3{,}140955\ R^2}{\cos^2 1^\circ} = 3{,}141912\ R^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \text{II}$$

Dus $\qquad C = 3{,}14 \ldots\ldots R^2.$

Hierin kunnen we voor R de lengte van een willekeurig lijnstuk kiezen.

De oppervlakte van een cirkel met straal R is dus gelijk aan R^2 maal een getal, dat voor alle cirkels hetzelfde is en dat we π zullen noemen, waarbij we alvast weten

$$\pi = 3{,}14 \ldots\ldots,$$

waarin voor de stippen één of meer op dit ogenblik nog onbekende cijfers moeten worden gedacht.

Verdere berekeningen met behulp van hogere wiskunde hebben aangetoond

$$\pi = 3{,}14159 \ldots\ldots$$

II.

Nu rijzen echter de volgende vragen.

1e. Als men voor n onbeperkt grotere getallen genomen denkt, zullen dan ${}_oO_n$ en ${}_iO_n$ minder dan welk bedrag ook van elkaar gaan verschillen of zal dit verschil $({}_oO_n - {}_iO_n)$ niet beneden een bepaald laagste bedrag komen?

Het zou bijvoorbeeld kunnen zijn, dat, welke waarde we ook voor n invullen, we steeds vinden, dat

${}_oO_n$ groter blijft dan $3{,}1415\ R^2$
en ${}_iO_n$ kleiner blijft dan $3{,}1414\ R^2$,

zodat het verschil ${}_oO_n - {}_iO_n$ nooit daalt beneden $0{,}0001\ R^2$.

Teneinde die vraag te kunnen beantwoorden onderzoeken we nader het gedrag, voor grote waarden van n, van de oppervlakte F van de ringvormige figuur, begrensd door de omtrekken van de omgeschreven en de ingeschreven regelmatige n-hoek.

$$F = {}_oO_n - {}_iO_n = {}_oO_n - {}_oO_n \times \cos^2 \frac{180^\circ}{n} =$$

$$= {}_oO_n \left(1 - \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right) = {}_oO_n \times \sin^2 \frac{180^\circ}{n}.$$

Deze vorm bevat twee factoren, die beide veranderen, als we n veranderen. De eerste factor (${}_oO_n$) kunnen we echter als volgt constant maken:

We tekenen rondom de gehele figuur een of ander vierkant, dat zo groot is, dat elke omgeschreven regelmatige veelhoek, welke kleine of grote waarde we n ook geven, er geheel binnen valt. De oppervlakte van dit vierkant noemen we V. V is constant en voor elke waarde van n is ${}_oO_n < V$.

Dus heeft men

$$F < V \sin^2 \frac{180^\circ}{n}.$$

Het rechterlid van deze ongelijkheid wordt kleiner, naarmate we voor n een groter getal kiezen.

Men kan, door n voldoende groot te nemen, $\frac{180^\circ}{n}$ kleiner maken dan welke kleine hoek ook. Men kan het getal $\sin^2 \frac{180^\circ}{n}$ kleiner maken dan welk klein getal ook en $V \sin^2 \frac{180^\circ}{n}$ en dus F kleiner maken dan welke geringe oppervlakte ook.

Het antwoord op de gestelde vraag luidt dus: ${}_oO_n$, C en ${}_iO_n$ zullen minder dan welke kleine oppervlakte ook van elkaar gaan verschillen, als men slechts n groot genoeg genomen denkt.

2e. Is π een gebroken getal?

Nadat men duizenden jaren tevergeefs naar een (bevestigend) antwoord op deze vraag heeft gezocht, heeft Lambert in 1770 met behulp van hogere wiskunde bewezen, dat π geen gebroken getal is.

3e. Is men in staat van π zoveel decimalen te berekenen als men verkiest?

Met behulp van hogere wiskunde is men inderdaad in staat zoveel decimalen van π te berekenen als men verkiest.

Men heeft er 800 en meer berekend.

Met behulp van de modernste machines berekende men zelfs meer dan 2000 decimalen. Men had hier 96 uren voor nodig!

Hier volgen de eerste 10 decimalen:

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots\ldots$$

III.

Het gevondene kan men op de volgende wijze samenvatten:

STELLING a. De oppervlakte C van een cirkel is gelijk aan de gemeenschappelijke limiet voor n naar oneindig van de oppervlakte van een ingeschreven en van een omgeschreven regelmatige n-hoek.

In formule-vorm:

$$C = \lim_{n \to \infty} {}_iO_n = \lim_{n \to \infty} {}_oO_n.$$

STELLING *b*. **De oppervlakte C van een cirkel met straal R wordt aldus in R uitgedrukt**

$$C = \pi R^2,$$

waarin π een vast getal is, dat men niet nauwkeurig kan bepalen, doch dat men op zoveel decimalen kan benaderen, als men verkiest, waarbij men vindt

$$\pi = 3{,}14159\ldots\ldots$$

STELLING *c*. **De oppervlakten van enige cirkels verhouden zich als de kwadraten der stralen:**

$$\frac{C_1}{R_1^2} = \frac{C_2}{R_2^2} = \frac{C_3}{R_3^2} = \ldots = \pi.$$

INGEKOMEN BOEKEN

Dr. B. P. Haalmeijer, *Leerboek der Vlakke Meetkunde*, 1e deel, 8e druk. Noordhoff, Groningen.

C. J. Alders, *Planimetrie voor M.O. en V.H.O.* Noordhoff, Groningen.

Noordhoff's Schooltafel, 15e druk.

Noordhoff's Kleine Log. Tafel voor Kweekscholen, in vier decimalen.

P. Wijdenes en Dr. P. G. van de Vliet, *Logarithmen- en Rentetafels*, Uitgave G. Noordhoff, Groningen.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, *Nieuwe Vlakke Meetkunde II*, Wolters, Groningen.

T. S. Usherwood and C. J. A. Trimble, *Intermediate Mathematics (Analysis)*. Macmillan & Co. Ltd, London.

E. J. F. Primrose, *Plane Algebraic Curves*. Macmillan & Co. Ltd, London.

C. Attwood, *Practical Five-Figure Mathematical Tables*. Macmillan & Co. Ltd, London.

J. Bass, *Cours de Mathématiques*. Masson et Cie, Paris.

R. Gouyon, *Précis de Mathématiques Spéciales*. Vuibert, Paris.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart.

Wolf-Ackermann, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Hirzel Verlag, Leipzig.

P. Lorenz, *Anschauungsunterricht in mathematischer Statistik*. Hirzel Verlag, Leipzig.

A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart.

G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band III. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart.

R. W. Weizenböck, *Der vierdimensionale Raum*. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart.

Prof. Dr. J. P. van Rooijen, *Het Nederlandse Bevolkingsvraagstuk*. Zomer en Keuning, Wageningen.

CONSTRUEREN

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Volgens de traditionele opvattingen bestaat de schoolmeetkunde uit een serie stellingen, die deductief samenhangen en (eventueel) uitgaan van axioma's, en een serie constructies, die hun basis vinden in een aantal postulaten of grondconstructies. Nu, onder invloed van moderne stromingen en ook in verband met het Wimecos-rapport, de overtuiging, dat het meetkunde-onderwijs met een intuïtieve cursus dient aan te vangen, zich meer en meer in de leerboeken manifesteert, treedt in ons onderwijs een derde element op: het tekenen van figuren. Bij dit tekenen mag de leerling alle hulpmiddelen gebruiken, die de leraar goedkeurt. Hiermee hangt nauw samen, dat we ons gaan afvragen, welke zin het heeft, de leerling, nadat hij het tekenen van figuren reeds geleerd heeft, voor te schrijven figuren te gaan construeren. Anders gezegd: welke zin heeft het hem na een tijdje voor te schrijven een gedeelte van zijn instrumenten thuis te laten en zich voortaan alleen met liniaal en passer te behelpen?

Om te trachten de zin van het construeren te doorgronden, willen we nagaan, wat vanuit historisch gezichtspunt de oorsprong is van het eisen van constructies. Aristoteles heeft de eis gesteld, dat elk begrip naar behoren gedefinieerd wordt en bovendien, dat van elk gedefinieerd begrip ook de existentie wordt bewezen. Het invoeren van een begrip als trapezium met gelijke evenwijdige zijden is volgens hem dus ontoelaatbaar, omdat dergelijke trapezia niet bestaan. In de tegenwoordige tijd zou men er geen principieel bezwaar tegen hebben een dergelijk begrip te definiëren; men zou dan eenvoudig constateren, dat de gedefinieerde verzameling leeg is. Aristoteles acht dit echter ontoelaatbaar.

In de wiskunde van Euclides ziet men, in overeenstemming hiermee, dat hij zich er steeds zorgvuldig rekenschap van geeft, dat de door hem gedefinieerde begrippen het bestaansrecht toekomt. Zo bewijst hij in boek I van de Elementen onder meer, dat er een gelijkzijdige driehoek bestaat, die een gegeven lijnstuk als zijde heeft (propositie 1), dat er in elk punt op een gegeven rechte een loodlijn bestaat (propositie 11), dat er door een gegeven punt buiten een

gegeven rechte een rechte getrokken kan worden, die evenwijdig aan de gegeven rechte is (propositie 31), dat er een vierkant bestaat, dat een gegeven lijnstuk als zijde heeft (propositie 46). De existentie van al deze figuren wordt door Euclides aangetoond op een manier, die wij een constructie zouden noemen. Merkwaardig is nu, dat de existentiestellingen (constructies) door Euclides in één doorlopend genummerde serie worden ondergebracht met de bewijzen van de overige stellingen. Naar het uiterlijk onderscheiden ze zich alleen daarin, dat de bewijzen van de existentiestellingen eindigen met de woorden ὅπερ ἔδει ποιῆσαι (wat gedaan moest worden), terwijl de overige bewijzen eindigen met de woorden ὅπερ ἔδει δεῖξαι (wat aangetoond moest worden). Dit doet vermoeden, dat Euclides weinig principieel verschil heeft gezien tussen de beide soorten stellingen.

De Euclidische constructies zijn dus in wezen existentiebewijzen. Hun structuur vertoont echter grote overeenkomst met onze constructies in die zin, dat het ontwerpen van de figuur, waarvan de existentie bewezen moet worden, geschiedt door het trekken van rechte lijnen en cirkels. We zullen trachten hiervoor een verklaring te vinden.

We hebben reeds vermeld, dat Aristoteles eiste, dat van elk gedefinieerd begrip de existentie bewezen wordt. Nu moet een stel definities uiteindelijk zijn oorsprong vinden in enige begrippen, waarvan de betekenis verondersteld wordt. Als deze grondbegrippen niet zouden existeren, dan zouden alle eruit afgeleide begrippen uiteraard ook niet kunnen existeren. Van deze grondbegrippen moet dus vaststaan, dat zij existeren, hoewel een bewijs hiervoor niet geleverd kan worden. Aristoteles heeft dit reeds ingezien en dus de eis gesteld, dat aan de basis van elk deductief systeem de existentie van enige begrippen gepostuleerd wordt. In de meetkunde zal men dus moeten uitgaan van enige begrippen, waarvan de existentie gepostuleerd wordt. Euclides heeft dit inderdaad gedaan en heeft de existentie van zijn meetkundige grondbegrippen in postulaten vastgelegd. Deze grondbegrippen zijn bij hem: rechte lijn en cirkel. De existentie van alle andere begrippen zal dus hiervan uitgaande bewezen moeten worden. Ziet men dit in, dan begrijpt men, dat een Euclidisch existentiebewijs geleverd zal moeten worden door uitsluitend rechte lijnen en cirkels te trekken. En als we dan nog weten, dat de Euclidische postulaten luiden: door elke twee punten kan men een rechte lijn trekken en met elk middelpunt en elke straal kan men een cirkel trekken, dan ziet men, dat een Euclidisch existentiebewijs noodzakelijk zal verlopen door uitsluitend gebruik te

maken van onze zg. constructiepostulaten. Deze ontlenen hun zin dus uiteindelijk aan een verouderd meetkundig systeem. Er is echter in zoverre een methodische achteruitgang te constateren, dat ze in het Euclidische systeem op natuurlijke wijze ingepast waren, terwijl tegenwoordig de constructies een apart hoofdstuk vormen, dat min of meer los staat van het systeem van stellingen. De vragen: wat kan ik bewijzen? en: wat kan ik construeren? leiden tegenwoordig tot een soort didactische splitsing van de leerstof, terwijl het karakter van de constructie als existentiebewijs geheel en al op de achtergrond is geraakt.

Ik moet toegeven, dat ik, om de zaak scherp te stellen, de feiten enigszins geweld aangedaan heb. Bij Euclides komen namelijk twee constructies voor, die in het voorgaande verband moeilijk te plaatsen zijn: de constructie van de bissectrix van een hoek (propositie 9) en van het midden van een lijnstuk (propositie 10). Weliswaar vormen deze constructies een logische schakel in het systeem van stellingen, maar toch zou men zich kunnen afvragen, of Euclides werkelijk een constructie gegeven heeft van het midden van een lijnstuk, omdat hij het noodzakelijk achtte de existentie daarvan te bewijzen.

Er staat wel vast, dat Euclides minder abstract gedacht heeft dan wij tegenwoordig doen. De vraag: hoe krijg ik dit midden? zal hem naast de existentievraag zonder twijfel parten gespeeld hebben. We zien dus, dat een constructie ook een functie kan hebben voor het ontwerpen van een figuur. Er is echter geen aanwijzing, dat de Oude Grieken zich met betrekking tot deze laatste functie beperkten tot rechten en cirkels. Integendeel, bij de tiërcering van de hoek b.v. werden verschillende andere hulpmiddelen te baat genomen. Dat Euclides in het begin van zijn Elementen slechts het gebruik van rechten en cirkels toestond, komt alleen daardoor, dat in dit stadium van de meetkunde het de enige figuren zijn, waarover men beschikt.

Na deze historische inleiding wordt het duidelijker, dat ook in onze schoolmeetkunde de constructies een tweeledig doel kunnen hebben:

a. het bewijzen van de existentie van een bepaald soort figuur,

b. het ontwerpen van een tekening door middel van bepaalde hulpmiddelen (liniaal en passer).

Nu is duidelijk, dat de constructies uit systematisch oogpunt hun belangrijkste functie hebben als bouwstenen voor een existentiebewijs. In het aanvangsonderwijs zou het echter didactisch onverantwoord zijn op deze functie de nadruk te leggen. Als zodanig kunnen ze beter eerst later ter sprake gebracht worden, b.v. bij het bewijs, dat door drie punten, die niet op één rechte liggen

één cirkel gaat. In het aanvangsonderwijs zullen we de constructie dus moeten zien als een middel om een figuur te ontwerpen. Willen we geen gevaar lopen de leerling een verkeerd inzicht in de functie van een constructie bij te brengen en zo zijn mogelijkheid later een goed inzicht te verkrijgen afremmen, dan is het beter in het aanvangsonderwijs niet van een constructie te spreken. Liever zou ik dus de constructies hier introduceren als tekenvoorschriften, dus als methoden om een nauwkeurige figuur te verkrijgen.

Vanzelf doet zich dan de vraag voor, hoe we de leerlingen het nut van dergelijke voorschriften kunnen bijbrengen. Laten we, om deze vraag te beantwoorden, eerst recapituleren, welke hulpmiddelen de leerling aanvankelijk ter beschikking heeft voor het tekenen van een figuur. Dit zijn:

a. de liniaal met cm-verdeling,
b. de passer,
c. de gradenboog,
d. de tekendriehoeken.

We moeten hem nu aan het verstand brengen, dat hij zich voortaan beter kan beperken tot:

a. de liniaal zonder cm-verdeling,
b. de passer.

Dit is geen eenvoudige opgave. De minste moeite hebben we met de cm-verdeling op de liniaal. Dat een cm-verdeling geen nauwkeurig hulpmiddel is om een lijnstuk te verplaatsen, te verdubbelen of in een gelijk aantal stukken te verdelen, is gemakkelijk in te zien. En dat een gradenboog geen geschikt hulpmiddel is om een hoek te verplaatsen of de bissectrix van een hoek te tekenen, is ook duidelijk.

De constructies van het transporteren van een hoek, van de middelloodlijn en van de bissectrix zullen dus door de leerling wel aanvaard worden als zinvol. Maar hoe moeten we hem de constructie van een loodlijn of van een rechte evenwijdig aan een gegeven rechte door middel van liniaal en passer aanpraten als ideaalmethode om deze te tekenen? Deze constructies zijn stellig geëigend voor het geven van existentiebewijzen van een loodlijn door een gegeven punt op een gegeven rechte en van een rechte door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven rechte. Maar als zodanig functioneren ze hier niet. Het nut, dat ze afwerpen, is de leerling een methode te leren een loodlijn of evenwijdige rechten te trekken op een manier, die technisch omslachtig is en die geen enkele leerling zal volgen, als er niet een leraar naast hem staat, die hem voorschrijft het nu juist zo te doen. De tekendriehoeken leveren hem op eenvoudiger manier een figuur, die minstens even nauwkeurig is.

Erger wordt het, als we de gradenboog geheel moeten missen. Heeft de cm-verdeling nog het karakter van onwiskundigheid — een opgave als: teken een lijnstuk van 5 cm, is mathematisch zinledig — de gradenboog heeft dit niet. Maar zodra we het gebruik van een gradenboog achterwege laten, kunnen we nog maar een beperkt aantal opgaven uitvoeren. We kunnen nog wel driehoeken tekenen met hoeken van 30°, 45°, 60°, e.d., maar achten het tekenen van een driehoek, waarvan een hoek gelijk aan 40° is, een onmogelijkheid, d.w.z. een dergelijke driehoek kunnen we niet „construeren"! We nemen dus onze toevlucht tot driehoeken, waarvan een of meer hoeken gegeven zijn. Want een hoek overbrengen, kunnen we door middel van passer en liniaal. En mocht gegeven zijn, dat de hoek 75° is, dan zijn we gelukkig in staat hem weer te „construeren", zij het dan door middel van een groot aantal lijnen en cirkels, terwijl het vroeger zo gemakkelijk ging. Ik geef toe, dat die gradenboog misschien niet nauwkeurig is, maar aan dat stel lijnen en cirkels zal ten slotte ook wel wat mankeren.

Een essentieel onderdeel van het traditionele onderwerp constructies is het construeren van driehoeken. Ik zou dit willen noemen: het tekenen van driehoeken door leerlingen, die hun gradenboog vergeten hebben en die hun opdrachten krijgen van een leraar, die zo vriendelijk is bij het formuleren van zijn opgaven met dit gemis rekening te houden. Anders gezegd: het is een geheel overbodige doublure van het onderwerp tekenen van driehoeken.

Conclusie. Aan de constructies bestede men in het onderwijs geen of weinig aandacht. Wil men er enkele behandelen, dan kan men wijzen op het voordeel van die bepaalde constructies voor het verkrijgen van een goede figuur. Wil men b.v. ook de constructie van een loodlijn of van evenwijdige rechten behandelen, dan brenge men het spelelement op de voorgrond. Maar in geen geval beschouwe men de constructies als een onmisbaar en zelfstandig onderdeel van het onderwijs in de planimetrie.

Na deze negatieve beoordeling van het nut van constructies „met liniaal en passer" willen we gaan onderzoeken, welke positieve rol de constructies spelen bij de existentiebewijzen. We zullen dan moeten preciezeren, wat we in dit verband onder een constructie verstaan.

We gaan daartoe na, op welke wijze de constructies in de traditionele schoolmeetkunde gebruikt worden. Nadat de leerling de fundamentele „constructies" van een loodlijn, een bissectrix, een middelloodlijn, evenwijdige rechten en van het overbrengen van een hoek

geleerd heeft en deze toegepast heeft op het construeren van driehoeken, komen de constructies voor het eerst weer ter sprake na het hoofdstuk meetkundige plaatsen. Het type vraagstukken, dat hier opgegeven wordt, kunnen we representeren door b.v. de volgende opgave:

Construeer de punten, die een gegeven afstand a hebben tot twee gegeven snijdende rechten l en m.

De oplossing luidt als volgt:

a. De verzameling van de punten, die een afstand a tot de rechte l hebben, bestaat uit de punten, die op een van de rechten p_1 en p_2 op afstand a van l liggen.

b. De verzameling van de punten, die een afstand a tot de rechte m hebben, bestaat uit de punten, die op een van de rechten q_1 en q_2 op afstand a van m liggen.

c. De verzameling van de punten, die aan beide voorwaarden voldoen, is de doorsnede van deze beide verzamelingen.

Hiermee is dus bewezen, dat er punten bestaan, die aan de genoemde voorwaarden voldoen, en wel altijd vier punten. Bovendien is een methode gegeven om deze vier punten te vinden. M.i. is dit het typische van een constructie. De traditionele opvatting gaat één stap verder en eist de punten te vinden volgens een aan bepaalde restricties onderworpen methode (praktisch gezegd: door gebruik te maken van uitsluitend liniaal en passer). Het expliciet vermelden van deze restricties is nodeloos en verwarrend.

We zien hiermee de nauwe analogie, die er bestaat tussen het opsporen van een meetkundige plaats en een constructie. In het eerste geval wordt gevraagd de verzameling van alle figuren te vinden, die aan een bepaalde eis voldoen. In het tweede geval wordt dit ook gevraagd. Het lijkt mij aangewezen de constructies hier, aansluitend bij het onderwerp meetkundige plaatsen, in het onderwijs te introduceren. Ze krijgen dan voor de leerling de functie, die ze in wezen hebben: het daadwerkelijk opsporen van alle figuren, die aan een bepaalde eis (of een complex van eisen) voldoen. Bij dit daadwerkelijk opsporen mag men gebruik maken van alle voorkennis, die men heeft. Te vragen, dat dit geschieden moet door alleen maar bepaalde handelingen uit te voeren, is een kunstmatige en overbodige complicering van het probleem.

Ter toelichting diene, dat dit daadwerkelijk construeren in de geest geschiedt en niet op papier. Het is een geestelijke activiteit, van dezelfde orde als het bewijzen. Het is natuurlijk mogelijk en didactisch stellig gewenst dit construeren te laten begeleiden door

een figuur, evenals men een bewijs aan de hand van een figuur verduidelijkt. Het essentiële blijft echter de redenering.

Een tweede voorbeeld, waarin de constructie duidelijk de functie vervult van het bewijzen van de existentie van een bepaalde figuur, is het volgende:

Construeer een cirkel, die door drie gegeven punten A, B en C gaat.

De oplossing is als volgt:

a. De verzameling van de punten, die middelpunt van een cirkel door A en B zijn, is de middelloodlijn van AB.

b. De verzameling van de punten, die middelpunt van een cirkel door B en C zijn, is de middelloodlijn van BC.

c. Het middelpunt van een cirkel, die aan beide eisen voldoet, zal dus moeten liggen op de doorsnede van deze twee verzamelingen.

d. Als de middelloodlijnen één punt X gemeen hebben, dan voldoet alleen de cirkel met middelpunt X en straal XA aan de vraag. Er is dan dus één oplossing. Dit geval doet zich voor, als de drie gegeven punten niet op één rechte liggen.

e. Als de middelloodlijnen evenwijdig zijn, is er geen cirkel, die voldoet. Dit is het geval, als de drie gegeven punten op één rechte liggen.

Conclusie: een cirkel is bepaald door drie punten, die niet op één rechte liggen.

Tevens hebben we het volgende corollarium gevonden: een rechte heeft met een cirkel hoogstens twee punten gemeen.

Zeer fraai ziet men de positieve rol, die constructies spelen, in het volgende vraagstuk:

Hoeveel raaklijnen kan men uit een punt buiten een cirkel aan die cirkel trekken?

Elke leerling zegt spontaan: twee, maar raakt in verlegenheid, zodra hem gevraagd wordt te zeggen, waarom dit juist is. De bekende constructie biedt hier uitkomst. Deze levert het bewijs, dat er twee raaklijnen zijn. Bovendien leert ze ons, hoe we deze raaklijnen op een nauwkeurige manier moeten tekenen. Het wetenschappelijk nuttige wordt hier dus met het praktische verbonden.

Een afzonderlijke plaats nemen in de planimetrie vraagstukken in van het type: construeer een driehoek, die aan een drietal eisen voldoet. B.v. construeer een driehoek ABC, als gegeven zijn c, R en r.

Hoe moeten we dit vraagstuk nu interpreteren? We kunnen vragen, of er een dergelijke driehoek bestaat, of de driehoek door de gegevens eenduidig bepaald is en of het bestaan mogelijk aan een bepaalde voorwaarde gebonden is. En voorts kunnen we eisen, dat

het antwoord niet langs goniometrische of algebraïsche weg gegeven wordt, maar zuiver planimetrisch door daadwerkelijk de driehoek te vinden. In dat geval is er weer sprake van een constructie. Deze verloopt geheel volgens het traditionele schema.

Een tweede vraag is, of dergelijke vraagstukken van groot nut zijn. Uit het voorgaande ziet men al, dat ze min of meer buiten het normale verband van de planimetrie vallen. Men zou de vlakke meetkunde gemakkelijk als een samenhangend systeem kunnen opbouwen en dergelijke problemen vermijden. Het inzicht in het geheel zou er niet door geschaad worden. Ik wil volstaan met hieruit de conclusie te trekken, dat we ze gerust missen kunnen. Ik vrees een storm van protest te krijgen, als ik verder zou gaan. Ik geef toe, dat het inderdaad vaak heel aardige puzzels zijn.

Samenvattend is mijn mening dus:

a. Het uitvoeren van constructies op grond van postulaten heeft geen zin.

b. Wel is het nuttig mathematisch verantwoorde tekenmethoden, die een behoorlijke graad van nauwkeurigheid hebben, in ons onderwijs op te nemen; men noeme deze echter geen constructies.

c. Het uitvoeren van een constructie staat op één lijn met het opsporen van een meetkundige plaats; het is een methode om alle figuren, die aan een bepaalde eis of complex van eisen voldoen, daadwerkelijk te vinden. Daarbij is, evenals bij een bewijs, de redenering essentieel en de figuur van secundair belang.

Wat verandert er ten gevolge hiervan in ons meetkunde-onderwijs? Heel weinig. De stof blijft hetzelfde, alleen zal men in vele gevallen, waarin men vroeger het woord „construeer" gebruikte, nu het woord „teken" gebruiken. De opgave: verdeel een lijnstuk in een aantal gelijke delen, zal niet meer onder de constructies gerangschikt worden, maar wel op dezelfde wijze worden uitgevoerd als vroeger. De constructies van de vierde evenredige of van de middelevenredige worden van constructies tot tekenmethoden. Hetzelfde geldt voor de constructie van de meetkundige plaats van de punten P, waarvoor geldt, dat $\angle$ APB gelijk is aan een gegeven hoek. Het gaat hier dus niet om een inperking van de leerstof, maar om een verbetering van het inzicht, waarvan we vooral bij het onderwijs in de stereometrie profijt zullen hebben. We zullen direct zien, op welke wijze.

In de stereometrie is de situatie doorzichtiger. De aanhangers van de constructiepostulaten hebben niet afgelaten ook hier een stel postulaten te introduceren. Ze ontlenen deze aan reeds bewezen

existentiestellingen of aan existentieaxioma's. B.v.: men kan door drie punten, die niet op één rechte liggen, een plat vlak aanbrengen; men kan de snijlijn van twee vlakken bepalen; men kan met een gegeven middelpunt en een gegeven straal een bol beschrijven.

Is het nu werkelijk noodzakelijk te bewijzen, dat door een punt buiten een vlak één vlak gaat, dat hieraan evenwijdig is, en zich bovendien nog uit te putten in het geven van een constructie van dit vlak op grond van de voorgeschreven postulaten? Dat hoeft niet, want het komt toch op hetzelfde neer, zal iemand tegenwerpen. Akkoord, maar waarom wordt dan begripmatig gescheiden gehouden, wat in wezen hetzelfde is (constructie en bewijs)? En is het werkelijk nodig te laten zien, dat de snijcirkel van een bol met een plat vlak op grond van de gegeven postulaten moeizaam geconstrueerd kan worden? En is er verder belang aan te hechten, dat de snijfiguur van een kegelvlak met een vlak loodrecht op de as ook al volgens de postulaten gevonden kan worden? Hier is, dunkt mij, evident, dat de constructies, waarin alleen maar bepaalde postulaten gebruikt mogen worden, methodische ondingen en ook praktisch nutteloos zijn. We halen er zelfs geen methode uit om gemakkelijk de snijfiguur van een cirkel met een bol te tekenen en niet eens een methode om de snijkromme van een vlak met een Edammer kaas te vinden, zonder dat we de kaas doorsnijden.

Het gevolg van de traditionele opvatting van constructies in de planimetrie is voor de stereometrie, dat we

òf de planimetrische methode hier à tort et à travers gaan toepassen, hoewel ze een blok aan het been is,

òf dat we voortaan onder constructie iets anders gaan verstaan, nl. datgene wat het in wezen is.

In het laatste geval ware het eenvoudiger geweest dan maar direct in de planimetrie de constructies dezelfde rol toe te bedelen, die ze in de stereometrie hebben. Voor het verkrijgen van een juist inzicht is dit zonder twijfel bevorderlijk.

In mijn eigen h.b.s.-tijd was de situatie nog merkwaardiger. Ik heb een hoofdstuk moeten leren, dat de titel droeg: constructies op een massieve bol. De lezer kan zich wel zo ongeveer voorstellen, wat voor postulaten daar gegeven werden en wat voor soort vraagstukken. Ze hebben mij zeer geïntrigeerd en ik heb dus mijn wiskundeleraar gevraagd, of dit nu werkelijk wiskunde was. Er waren drie wiskundeleraren aan de school verbonden, die goed les gaven en aan wie ik met veel respect terugdenk. De eerste bleef mij het antwoord schuldig en zei, dat ik het beter aan zijn collega kon vragen. De

tweede zei, dat hij het niet wist, maar dat collega nummer drie speciaal verstand van dit soort dingen had. En de derde zei, met enige ironie: „Constructies op een houten bol met zo'n passer met één kromme poot, nee, dat is geen wiskunde." Dit illustreert wel, tot welke uitwassen het construeren op grond van postulaten leiden kan en ook, dat veel verstandige mensen een traditie volgen zonder zich erin te verdiepen, of deze wel goed gefundeerd is. Allicht, deden we dit niet, dan zouden we onze weg in het leven en ook in de didactiek nooit vinden.

WISKUNDE EN FYSISCHE WERKELIJKHEID [1])

door

Prof. Dr. A. D. FOKKER

Hoe komt het, dat de wiskunde toepasselijk is op de fysische werkelijkheid, dat die werkelijkheid in wiskundige begrippen, in wiskundige symbolen kan worden begrepen? Einstein zegt: „das ewig Unbegreifliche an der Welt ist ihre Begreiflichkeit".

Wij lezen dat er bij Plato sprake was van een wereld van zuivere ideeën waarvan wij in het aardse slechts een onvolmaakte, onzuivere afschaduwing kunnen leren kennen. In die andere wereld is de heldere waarheid, en het noodlot wil, dat die waarheid in de aardse wereld niet te vinden is. Bij Aristoteles daarentegen staat de ondervinding voorop. Deze overtuiging is ook die van Thomas van Aquino: er leeft en werkt in ons geen begrip dat wij niet aan onze ervaring ontleend hebben. Ook de spreker huldigt die opvatting. Ons denken is een levensfunctie. Het dient ons leven. Het leert ons hoe het handelen te richten op een doel, afgaande en vertrouwende op de reeds opgedane ondervinding. Het gebruikt daarbij begrippen die abstracte samenvattingen zijn van die ondervinding: de invarianties uit talloze ervaringen.

Onze kinderen krijgen te maken met allerlei groepen van dingen, meestal vaste voorwerpen. Twee handen, twee ballen, twee koekjes, twee voeten. De invariant die het, zij het onbewust, overhoudt en onthoudt is wat wij noemen het getal twee. In de ruimte tasten en betasten zij allerhande vormen, zij kijken en grijpen ernaar. Zo

[1]) Sterk bekorte samenvatting van een voordracht in de vakantiecursus van het Mathematisch Centrum op 28 augustus 1956.

organiseert zich de herinnering, die wij noemen haptisch ruimtebesef en optisch ruimtebesef, de stof waaruit wij later onze ruimtelijke begrippen putten.

Het citaat van Einstein is ontleend aan zijn artikel in het Journal of the Franklin Institution, **221** (1936) 313, over Physik und Realität. Hij accentueert dat onze begrippen een vrije schepping zijn van den geest. Wij scheppen daarmede orde in den chaos van onze gewaarwordingen. Dat dit mogelijk is blijft raadselachtig. Dat de begrippen logisch onafhankelijk zijn van de ervaring spitst hij geestig toe door te zeggen dat hun betrekking tot de gegevens der zinnen niet die is van een uittreksel, niet die als van „Suppe zum Rindfleisch, sondern eher wie die der Garderobenummer zum Mantel". — Niettemin kan men iets verder bij hem lezen, dat de noodlottige dwaling, als zouden de euclidische meetkunde en de bijbehorende ruimtelijke begrippen op een noodzakelijkheid van denkvorm gegrond zijn, dat die noodlottige dwaling hierop berust, dat de proefondervindelijke grondslag waarop het axiomatisch steigerwerk van de meetkunde is opgetrokken, in het vergeetboek geraakt was.

Het is moeilijk om hierin niet een tegenspraak te horen van wat hij eerder gezegd heeft. Veronachtzaming van verband van axiomatisch steigerwerk met de empirische grondslag leidt tot een noodlottige dwaling, en toch zouden die axioma's vrij gecreëerd zijn buiten de ondervinding om?

Hoe komt Einstein tot die ontkenning van de oorsprong der begrippen in de ondervinding? In zijn wetenschappelijke autobiografie, voor zijn zeventigste verjaardag geschreven, memoreert hij de onvergetelijke indruk, die het op hem als kleine jongen maakte, toen zijn oom hem het bewijs leerde van de stelling van Pythagoras over de rechthoekszijden en de hypothenusa van een rechthoekige driehoek, en toen hij er een eigen bewijs bij gevonden had. Hij was overweldigd door het besef dat men, door zuiver te denken en te redeneren, iets kon bewijzen waaraan geen ondervinding bij machte was iets te veranderen! — Een tweede motief laat zich vinden in zijn ontdekking van de theorie der zwaartekracht. De geniale uitwerking van de gedachte dat de zwaarte van dezelfde aard moest zijn als de traagheidskracht van een massa in een versnellende kooi liep uit op de stelling dat in een vrije beweging zonder krachtwerkingen de duur een maximum is. De duur, $\int ds$, dat is de som der intervallen ds langs de beweging, waarbij het element ds door een kwadratische vorm

$$ds^2 = \sum g_{ab}\, dx^a\, dx^b$$

gevonden werd uit de differentialen der coördinaten van tijd en ruimte langs de beweging, met coëfficiënten *gab*, functies van die coördinaten. Vandaar af werkte hij zich in, met de hulp van zijn studievriend Grossmann, in de theorie van Riemann en Bianchi over de differentiale meetkunde der gekromde ruimten. Hij vond de meetkunde die hij nodig had kant en klaar liggen. Die meetkunde was stellig niet ontleend aan sterrekundige waarnemingen, waaraan tenslotte Einstein zijn conclusies toetsen kon. Dat hij ze bevestigd vond, sloeg hem opnieuw als een wonder dat de adem deed stokken. — Ik geloof dat er nog een derde factor is; deze nl., dat Einstein als Jood in zijn geest mede gevormd was door een traditie van het Oude Testament, die Jahwe buiten de wereld plaatste, met niets in de wereld te vergelijken, volkomen anders, nergens te vinden, en toch de wereld regerende en zich in haar geschiedenis openbarende.

Wàs die meetkunde van Riemann geheel vrije schepping, en alleen dat? Was zij niet ontleend aan de ondervinding? Vóór Riemann leefde Gauss. Gauss beoefende de geodesie. Hij was een landmeter van hogere orde. De gekromde oppervlakte van de aarde moet zijn gedachten hebben beziggehouden en voedsel gegeven. Extrapoleren is een wiskundige bezigheid bij uitnemendheid, sluitredenen maken van n tot $n + 1$. Uitbreiding van de eigenschappen van 2-dimensionale gekromde oppervlakken tot drie- of meerdimensionale gekromde ruimtes is een extrapolatie die weliswaar de voorafgaande ervaring te buiten gaat, maar die daarom niet ophoudt in die ervaring gegrond te zijn, als verwachting. Zulke inzichten, deze extrapolerende interpretaties van symbolen, kunnen op nieuwe ondervinding liggen te wachten. Bij nieuwe ontdekkingen kunnen zij toepasselijk blijken, of niet.

Wijzelf, met ons denken, maken ook deel uit van de fysische werkelijkheid. De fysische werkelijkheid is een deel van onze werkelijkheid. Subject en object zijn ongescheiden onderscheiden. In andere delen van de wereld doet men dat minder, maar in de westeuropese filosofische cultuur is het onderscheid tussen subject en object op de spits gedreven. Daarom kan de toepasselijkheid van wiskundige symbolen in de fysische „buiten"wereld tot een raadsel worden. Maar de wiskunstenaar, die zijn ondervinding, die de menselijke ondervinding verwerkt in een typische abstraherende symboliserende werkzaamheid — al pleegt men die subjectief te noemen — is bezig objectieve werkelijkheid te herleven om ze als in zijn symbolen levende herinnering paraat te houden.

TWEE EXAMENVRAAGSTUKKEN

$x \cos \varphi + y \sin \varphi = c$ is de vergelijking van een rechte, op afstand $| c |$ van de oorsprong O. φ is de hoek, die de loodlijn uit O op deze rechte, maakt met de positieve richting van de X-as. $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ drukt uit, dat deze rechte door het punt (a, b) gaat. Door (a, b) gaan twee rechten, die van O de afstand $| c |$ hebben, indien het punt (a, b) buiten de cirkel O $(| c |)$ ligt.

Blijkbaar bepalen dus de raakpunten van de raaklijnen uit (a, b) aan de cirkel $O(| c |)$ de hoofdwaarden van de vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$, de vergelijking is niet vals als $a^2 + b^2 \geqq c^2$. (Zie L.O. examen wiskunde 1955).

$a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi = c_1 \ldots .$ (1)

$a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi = c_2 \ldots .$ (2) $\rightarrow pa_2 \cos \varphi + pb_2 \sin \varphi = pc_2$.

Nemen we $pc_2 = c_1$, dan zijn (pa_2, pb_2) en $(a_1\ b_1)$ twee verschillende punten, aannemend dat (1) en (2) niet afhankelijk zijn.

Nodig en voldoende voorwaarde voor een gemeenschappelijke wortel van (1) en (2) is dus:

De rechte door (pa_2, pb_2) en (a_1, b_1) heeft van O de afstand $|c_1|$. De vergelijking van deze rechte luidt:

$$(y - b_1)(pa_2 - a_1) - (x - a)(pb_2 - b_1) = 0.$$

De afstand tot O: $\left| \dfrac{a_1(pb_2 - b_1) - b_1(pa_2 - a_1)}{\sqrt{(pa_2 - a_1)^2 + (pb_2 - b_1)^2}} \right|$.

De gevraagde voorwaarde wordt dus:

$$p^2(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = c_1^2(pa_2 - a_1)^2 + (pb_2 - b_1)^2.$$

of: $$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 = (c_1a_2 - a_1c_2)^2 + (c_1b_2 - c_2b_1)^2.$$

zie K I 1956.

Dr. W. A. M. Burgers

BENADERINGS-CONSTRUCTIE, MET PASSER EN LINIAAL, VAN HET GETAL π; „KWADRATUUR" VAN DE CIRKEL

door

G. SCHRÖDER ('s-Gravenhage)

Archimedes heeft als benadering van π de breuk $\frac{22}{7}$ gegeven, dus 3,14285714 . . . ., die van de werkelijke waarde van π, zijnde 3,141592653589793 . . . ., afwijkt in de derde decimaal.

Kochanski vond in 1685 als benadering 3,141533 . . . .; hierbij is de relatieve fout circa 2/100.000.

In 1934 verscheen van Quoika een constructieve benadering met uitkomst 3,141594 . . . .; hierbij is de relatieve fout $3\frac{1}{2}$/10.000.000.

Reeds in 1611 publiceerde Adriaan Adriaansz. Metius een door zijn vader gevonden benadering van π, uitgedrukt in de breuk $\frac{355}{113}$. Deze staat gelijk met 3,1415929203 . . . ., zodat de relatieve fout hierbij rond 8/100.000.000 is.

Bijgaande constructie met passer en liniaal geeft als benaderende waarde van π het getal 3,1415926234 . . . ., met een relatieve fout van iets minder dan 1/100.000.000.

Stelt men het getal π voor door de afstand van Den Haag naar Amsterdam (zegge 50 kilometer), dan wijkt deze benadering daarvan $\frac{1}{2}$ millimeter af.

De constructie gaat uit van de benaderingsformule:

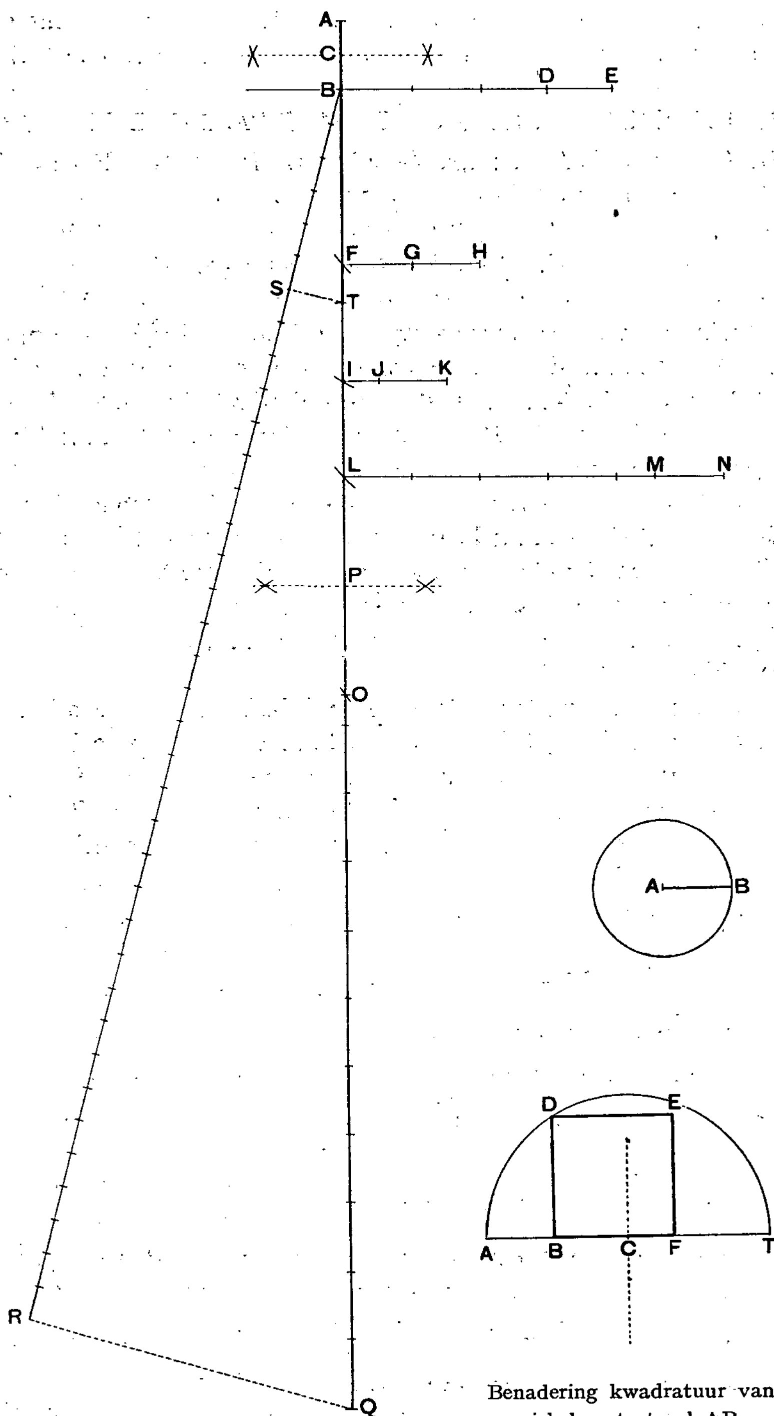
$$\pi = \frac{6}{37}(\sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{10} + 12).$$

Constructie:

Gegeven: een lijn AB.

Gevraagd: met passer en liniaal een lijn te construeren, die de waarde $\pi \times$ AB benadert.

Uitvoering: Deel de lijn AB doormidden, waardoor punt C als middelpunt gevonden wordt. Richt in punt B een lijn op, loodrecht op AB. Plaats op die loodlijn een punt D, zodanig dat BD $= 3 \times$ AB, en een punt E, zodanig dat BE $= 4 \times$ AB. Cirkel in punt D de lijn BE om op het verlengde van AB, waardoor als snijpunt het punt F ontstaat. Richt in punt F een lijn op, loodrecht op AF. Plaats op die loodlijn een punt G, zodanig dat FG = AB, en een punt H, zodanig dat FH $= 2 \times$ AB. Cirkel in punt G de lijn FH



Benadering kwadratuur van cirkel met straal AB

om op het verlengde van AF, waardoor als snijpunt het punt I ontstaat. Richt in punt I een lijn op, loodrecht op AI. Plaats op die loodlijn een punt J, zodanig dat IJ = $\frac{1}{2} \times$ AB, en een punt K, zodanig dat IK = $1\frac{1}{2} \times$ AB. Cirkel in punt J de lijn IK om op het verlengde van AI, waardoor als snijpunt het punt L ontstaat. Richt in punt L een lijn op, loodrecht op AL. Plaats op die loodlijn een punt M, zodanig dat LM = $4\frac{1}{2} \times$ AB, en een punt N, zodanig dat LN = $5\frac{1}{2} \times$ AB. Cirkel in punt M de lijn LN om op het verlengde van AL, waardoor als snijpunt het punt O ontstaat. Deel de lijn LO doormidden, waardoor punt P als middelpunt wordt gevonden. Verleng de lijn AP tot een punt Q, zodanig dat PQ = $12 \times$ AB. Trek door punt B een willekeurige lijn en zet daarop 37 gelijke delen af, uitkomend op een punt, dat met R wordt aangegeven. Zet vanuit punt B 6 van deze delen af, uitkomend op een punt, dat met S wordt aangegeven, waardoor BS = $\frac{6}{37} \times$ BR. Verbind de punten Q en R en trek, daaraan evenwijdig, een lijn door het punt S, die de lijn BQ snijdt in een punt, dat met T wordt aangegeven. Nu is de lijn BT de benadering van $\pi \times$ AB.

Uitwerking:

Lijn BF =	$\sqrt{7} \times$ AB =	2,6457513111	$\times$ AB
Lijn FI =	$\sqrt{3} \times$ AB =	1,7320508076	$\times$ AB
Lijn IL =	$\sqrt{2} \times$ AB =	1,4142135624	$\times$ AB
Lijn LP =	$\frac{1}{2}\sqrt{10} \times$ AB =	1,5811388301	$\times$ AB
Lijn PQ	=	12	$\times$ AB.
Lijn BQ	=	19,3731545112	$\times$ AB
Lijn BT =	$\frac{6}{37} \times$ lijn BQ =	3,1415926234	$\times$ AB
Waarde $\pi \times$ AB	=	3,1415926536	$\times$ AB
Waarde benadering	=	3,1415926234	$\times$ AB
Verschil	=	0,0000000302	$\times$ AB

De relatieve fout bedraagt dus:

$$\frac{1}{3{,}14} \times \frac{302}{10^{10}} = \frac{96}{10^{10}} < \frac{1}{10^8}.$$

Opmerking: Wil men de constructie tot een kleiner oppervlak beperken, dan kan men die uitvoeren op basis van:

$$\{(\sqrt{7}\,AB + \sqrt{3}\,AB + \sqrt{2}\,AB + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\,AB) \times \tfrac{1}{2} + 6\,AB\} \times \tfrac{12}{37}.$$

Construeert men op basis van:

$$\{(\sqrt{7}\,AB + \sqrt{3}\,AB + \sqrt{2}\,AB + \tfrac{1}{2}\sqrt{10}\,AB) \times \tfrac{1}{3} + 4\,AB\} \times \tfrac{18}{37},$$

dan komt het punt Q zelfs tussen de punten L en P te liggen. Lijn BR kan men naar believen verkorten, door de delen daarvan kleiner te nemen.

Benaderde „kwadratuur" van de cirkel.

Zet op een rechte de lijnen AB en BT af, deel de lijn AT doormidden, waardoor punt C als middelpunt ontstaat, beschrijf in punt C met AC als straal een halve cirkel, richt in punt B een loodlijn op, die de cirkel snijdt in een punt, dat met D wordt aangegeven. De lijn BD is de middelevenredige tussen AB en BT. Met BD als zijde wordt nu het vierkant BDEF geconstrueerd. De oppervlakte van dit vierkant wijkt van die van de cirkel met straal AB relatief iets minder dan 1/100.000.000 af.

BOEKBESPREKING

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.* 8. Aufl. Teubner, Stuttgart. 1956. DM 13.40.

Daar het bestaan van het axiomastelsel van Hilbert voldoende bekend is kan hier worden volstaan met een korte aankondiging. Het onderscheid van deze achtste druk, die bewerkt is door P. Bernays, met de vorige, die nog door Hilbert zelf werd verzorgd, bestaat uit een aantal correcties en kleine aanvullingen. In dit verband kan gewezen worden op een als Supplement II opgenomen nieuwe vereenvoudigde behandeling van de leer der verhoudingen.

Juist in deze tijd, nu het inleidend onderwijs in de meetkunde in geding is en in verband daarmee de traditionele opzet van de schoolmeetkunde is het van belang dat de wiskundedocenten kennis nemen van een volledig axiomastelsel. Dit zal slechts kunnen leiden tot voorzichtigheid en reserve bij het aanduiden van de traditionele opzet als „axiomatische opbouw".

D. N. van der Neut

Prof. Dr. Hans Freudenthal, *Waarschijnlijkheid en statistiek* (Volks-universiteitsbibliotheek, 2de reeks, nr. 57; De Erven F. Bohn N.V., Haarlem, 1957; geb. *f* 8.80).

De waarschijnlijkheidsrekening is wel een van de meest fascinerende takken van de wiskunde en de blijkbaar aangeboren goklust van de mens doet ook de leek op wiskundig gebied er belang in stellen. Daarbij komt, dat de statistiek, die de waarschijnlijkheidsrekening voor meer serieuze doeleinden dan voetbalpools e.d. exploiteert, zich gedurende de laatste kwart-eeuw enorm heeft ontwikkeld en steeds meer tot een onontbeerlijk hulpmiddel geworden is voor wetenschappelijke werkers van velerlei richting, ook voor hen, die tot dusver na hun middelbare-schoolopleiding de wiskunde konden laten voor wat zij was. En de voorstellen, de statistiek bij het v.h.m.o. in te voeren, zijn de lezers van „Euclides" voldoende bekend.

Het is daarom een zeer gelukkige gedachte, in de Volksuniversiteitsbibliotheek een werkje over „Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek" te doen verschijnen. De uitgever kan zich gelukkig prijzen, dat prof. Freudenthal dit boekje heeft willen schrijven.

Zo lijkt het mij van groot belang, dat een boekje, dat naar wij hopen in de handen van vele niet-wiskundigen zal komen, duidelijk demonstreert, dat de wiskunde geen „droog" vak is; dat de wiskundige zich niet alleen met abstracte redeneringen ophoudt, maar dat wel degelijk ook de humor om de hoek komt kijken en dat bij wiskundige beschouwingen en redeneringen ook zeker de aesthetica in het geding is. Naar mijn mening is prof. Freudenthal er bij uitstek in geslaagd deze elementen naar voren te doen komen.

In het „woord vooraf" vergelijkt de schrijver zijn boek met een roman (waarbij het echter niet voldoende is naar de laatste bladzij te kijken om op de hoogte te zijn), althans met een verzameling short stories, evenwel voor lezers met een B-diploma van het v.h.m.o., wat echter niet consequent kon worden doorgevoerd. Nu moge het zijn, dat vele wiskundigen het boek min of meer „als een roman" doorlezen, degene voor wie het boek in de eerste plaats bestemd is doet dat zeker niet en hij zal, zoals de schrijver ook aangeeft, wel eens een short story overslaan. Maar wat hij wel kan volgen is ruimschoots voldoende om vele misverstanden uit de wereld te helpen; hij zal b.v. vast weten, dat de kans op de 100.000 niet ½ is (je krijgt hem of je krijgt hem niet).

Natuurlijk geeft het boek niet genoeg voor de vakman; de wiskunde-docent, die straks misschien de statistiek zal moeten doceren en die zijn kennis er van wil opfrissen, vindt er veel waardevols in. De wijze van behandelen is streng. In het begin wordt van de veel omstreden definitie van kans van Laplace terecht geen gewetensbezwaar gemaakt; eerst aan het slot gaat een hoofdstuk „Filosofie der waarschijnlijkheid" nader op de grondslagen in, waarbij ook de axiomatische opbouw van Kolmogorov wordt aangestipt. Stellig komen deze beschouwingen beter tot hun recht, wanneer de lezer reeds enigszins in de stof is ingewerkt dan wanneer hij er mee wordt geconfronteerd als hij nog niet in de betekenis van som- en productregel enz. is doorgedrongen.

Behalve toepassingen op diverse kansspelen komen enkele op de natuurwetenschap aan de orde, waarbij de nadruk op de genetica valt. De correlatierekening wordt niet behandeld in tegenstelling tot het vroeger verschenen boek in deze serie (van prof. Tinbergen, 1936), dat meer van de beschrijvende statistiek behandelde.

Voor de lezers van „Euclides" is het werk van prof. Freudenthal stellig van veel belang, te meer daar de didactische gaven van de schrijver duidelijk uit de gehele opzet blijken en tot lering kunnen strekken. Het boek is keurig uitgevoerd en (voor deze tijd) niet duur.

H. W. Lenstra

Dr. P. C. Oudenaarden, *Teken en visie* — de wijsgerig-anthropologische grondslagen van het tekengebruik, speciaal in de exacte wetenschappen (dissertatie), Van Gorcum, Assen, 1955, 169 blz., prijs ƒ 10.50.

Om de realiteit te leren kennen, ontwerpt de mens structuren. Deze structuren worden afgebeeld door middel van tekencomplexen. De structuur van deze tekencomplexen is identiek met de ontworpen structuur van de realiteit. De ontwikkeling van de wetenschap bestaat daarin, dat de mens steeds, als de ontworpen structuren onvoldoende blijken voor het kennen van de realiteit, gedrongen wordt tot een nieuwe visie op de realiteit en daardoor nieuwe structuren ontwerpt. Dit is het

grondthema van dit boek. Voor een goed begrip moet hierbij opgemerkt worden, dat de schrijver onder tekencomplexen (en tekensystemen) niet verstaat de taal in het algemeen, echter wel onder meer geformaliseerde taal, wiskundige formules, structuurformules en modellen. Het thema wordt toegelicht aan de hand van beschouwingen over scheikunde, wiskunde en natuurkunde. Het hoofdstuk over scheikunde is uitermate helder geschreven en geeft een duidelijk overzicht over de ontwikkeling van de scheikunde. Het daarop volgende hoofdstuk over wiskunde en logistiek is echter zeer teleurstellend. Op de natuurkunde, die in dit verband de moeilijkste problemen biedt, gaat de schrijver niet diep in. De auteur fundeert zijn standpunt in de filosofische antropologie. Een bespreking hiervan zou echter niet op zijn plaats zijn.

P. G. J. Vredenduin

A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung.* 4. Aufl. Basel, 1956, Birkhäuser. Zw. Fr. 26.

Een uitvoerige bespreking van de 4e editie van dit welbekende, vroeger door Springer uitgegeven, leerboek der groepentheorie is stellig overbodig. Maar het is misschien niet overbodig, de leraar te wijzen op een nieuw hoofdstuk, waarin de groepen der ornamenten worden behandeld. Dit is een onderwerp, waaraan de auteur zijn hart heeft verpand, omdat hij er de relaties tussen wiskunde en kunst in ziet belichaamd. Het hoofdstuk is fraai geïllustreerd met voorbeelden van ornamenten uit alle tijden. Een merkwaardig niet-euklidisch ornament in kleurendruk siert de bladzijde tegenover de titel.

Referent is weinig te spreken over de terminologie van auteur, waarbij onderscheiden wordt tussen functies en substituties — de „functies" worden op de gebruikelijke wijze, de „substituties" in tegengestelde zin gecomponeerd; de tegenwoordig gebruikelijke term is trouwens „afbeeldingen". Deze overbodige complicatie wordt nog vergroot doordat „raumfeste" en „körperfeste" functies en substituties worden onderscheiden, naar gelang of met de transformaties de voorstelling is verbonden van een vaste ruimte, waarin lichamen worden getransformeerd, of van vaste lichamen, terwijl de ruimte wordt getransformeerd. Voor het goede begrip is hier een unificatie vereist.

G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation.* Bd. III. Basel, 1956, Birkhäuser. Zw. Fr. 40.

In dit derde deel worden de toepassingen op partiële differentiaalvergelijkingen, differentievergelijkingen, integraalvergelijkingen en gehele functies van exponentieel type behandeld.

H. Freudenthal

Prof. Dr. N. H. Kuiper, *Differentiaal- en integraalrekening* (95 blz.). Prijs *f* 9,—, H. Veenman en Zonen, Wageningen.

Dit boekje is bedoeld voor Wageningen en geeft dan ook stof, die rekening houdt met het programma van de Landbouwhogeschool.

Toch is het voor anderen dan de bedoelde categorie de moeite waard om er kennis mee te maken al is het alleen maar om de originele opzet en de wijze van druk. De bladzijden zijn namelijk zó genummerd dat het steeds zonder omslaan mogelijk is

twee bladzijden te gelijk te bekijken, hetgeen in vele gevallen gemak geeft en waaraan men na heel korte tijd gewend is. Verder is van het begin af het functiebegrip algemeen ontwikkeld en zijn dadelijk, hetgeen voor het begrijpen van groot belang is, ook voorbeelden van discontinuïteiten gegeven. De terminologie is in sommige opzichten afwijkend van de gebruikelijke. Als het begrippen betreft, waarvoor nog geen geijkte normen bestaan is er natuurlijk veel voor te zeggen om zoveel mogelijk de aanduiding te verbeteren, maar betreft het reeds lang ingeburgerde woorden, dan kan verwarring ontstaan ook al is de nieuwe terminologie beter. In hoeverre dit hier 't geval is en in hoever toepassingen op biologisch gebied invloed hebben uitgeoefend kan ik niet beoordelen.

Verschillende manieren om een grafiek te tekenen, worden besproken, hetgeen het functiebegrip ten goede komt. De stof, die behandeld wordt beperkt zich tot de grondslagen van de differentiaalrekening, maxima en minima, middelwaardestelling, reeksen van Taylor en MacLaurin met toepassingen, beginselen van de integraalrekening en differentiaalvergelijkingen met biologische toepassingen en 't eindigt met de integraal van Gauss.

Enkele opmerkingen tot slot. Inconsequent lijkt het me op blz. 14 de opmerking te maken dat begrippen als reëel getal, oneindig enz. beter begrepen worden, als ze eerst gedefinieerd worden voordat ze gebruikt worden en op blz. 7 e.v. het reële getal te gebruiken terwijl op blz. 14 de definitie volgt. 't Boekje had net zo goed met reële getallen kunnen beginnen. Op blz. 62 staat òf in opgave (19,5) òf in N.B. er onder, een drukfout.

De uitvoering is uitstekend en 't is zeer zeker een handig boekje, dat ten volle aanbevolen kan worden.

H. Mooy

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN H.B.S. IN 1955

Wiskunde h.b.s. A en B

De commissie wiskunde I constateerde opnieuw, dat de hoedanigheid en de verzorging van het schriftelijke werk nog steeds onvoldoende zijn. De prestaties van vele kandidaten moesten met de cijfers 1, 2 of 3 worden gewaardeerd.

De resultaten van het mondelinge examen vallen, gelet op het onvoldoende schriftelijk werk, niet tegen.

De wenselijke parate kennis betreffende algebraïsche en goniometrische functies, grafische voorstellingen daarvan, goniometrische verhoudingen en trigonometrische formules, is veel groter dan een aantal jaren geleden. Het is de commissie opgevallen, dat een aantal kandidaten wel vrij moeilijke ongelijkheden kan oplossen, maar faalt bij de opgaven van het type $\times^2 < 9$. De foutieve oplossing is dan $\times < \pm 3$. Ook worden de ongelijkheden $\times > 9$ en $\times < 3$ vaak gecombineerd tot $3 > \times > 9$.

Bij de goniometrie blijkt men de rechthoekige driehoek met de zijden 3, 4 en 5 niet te kennen. Het berekenen van cos. $\times$ als sin. $\times = 0{,}8$ is een tijdrovende bezigheid.

De tijd kan beter worden benut om het examen op hoger niveau te brengen. Bij de correctie van het schriftelijke werk voor stereometrie en beschrijvende meetkunde viel het op, dat vele kandidaten geen onderscheid maakten tussen lijn (of rechte), halve lijn (of halve rechte) en lijnstukken.

Ook meenden nog vele kandidaten, dat als vlak V loodrecht staat op vlak W, elke lijn in V loodrecht staat op elke lijn in W.

Bij mondelinge examens bleek, dat vele kandidaten niet in staat waren definities en stellingen correct te formuleren.

In de beschrijvende meetkunde verdient het aanbeveling, dat een raaklijn uit een punt buiten een cirkel aan die cirkel ook werkelijk geconstrueerd wordt en niet wordt verkregen door een lineaal langs de cirkelomtrek te leggen. Het is zeer gewenst, dat de constructies van een korte toelichting worden voorzien, waarbij de gebruikte punten, lijnen en vlakken met letters worden aangeduid en in de toelichting worden vermeld.

Bij de mondelinge examens beschrijvende meetkunde bleek bij de kandidaten vele malen een tekort aan routine in de eenvoudigste grondconstructies, zodat zij aan het uitwerken van een eenvoudig vraagstuk nauwelijks toekwamen.

Wiskunde h.b.s. A

Aan meer dan de helft van de kandidaten moest een onvoldoend cijfer worden toegekend. Toch was het schriftelijke werk niet moeilijk en op het mondelinge gedeelte werd vrij eenvoudig gevraagd. De commissie moet dus tot haar leedwezen constateren, dat vele kandidaten dit vak schromelijk hebben verwaarloosd of geen goede leiding hebben gehad. De kennis van veelvuldig voorkomende formules en stellingen ontbrak maar al te dikwijls. Velen kenden wel iets van deze dingen, maar begrepen ze niet en konden ze dus niet toepassen. Bij het geven van definities werden vaak wonderlijke en onbegrijpelijke volzinnen geproduceerd.

De commissie hoopt, dat het overbrengen van de financiële rekenkunde naar de handelswetenschappen gunstige gevolgen zal hebben voor het wiskundecijfer.

Mechanica h.b.s. B

Hoewel de opgaven voor het schriftelijke examen niet moeilijk genoemd konden worden, was het resultaat teleurstellend. Slechts weinig kandidaten bleken het begrip „verplaatsing" als vector te kennen. Velen werkten bij de oplossing van het vraagstuk over de beweging langs een cirkel nog met „middelpuntvliedende" krachten, in plaats van met „middelpuntzoekende". In verschillende gevallen werden daardoor de vragen fout beantwoord. Maar zelfs al was het antwoord juist, dan bleek toch uit de wijze van oplossen een onvoldoende begrip van hetgeen er bij zo'n beweging geschiedt.

Verschillende kandidaten tekenden de figuren, betrekking hebbend op de gevallen van evenwicht, niet behoorlijk volgens de gegeven afmetingen, of met de gegeven krachten niet in de goede verhouding ten opzichte van elkaar. Daardoor ging het verband verloren, dat bij een juiste tekening gemakkelijk te voorschijn zou zijn gekomen, en moest berekening uitkomst geven, hetgeen dan nodeloos omslachtig was.

Het was verheugend, dat het mondelinge examen in de mechanica bepaald betere resultaten gaf dan veelal in vorige jaren, al waren er nog wel kandidaten, die blijk gaven niet het minste begrip van het vak te hebben.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSEXAMENCOMMISSIE-1956.

Wiskunde

In het verslag van 1955 is een uitvoerige uiteenzetting gegeven van de eisen, die op het examen gesteld worden.

Ditmaal wil de subcommissie zich tot enkele belangrijke punten beperken.

Het doet de subcommissie genoegen te constateren, dat steeds meer kandidaten eraan gewend zijn bij het tekenen van een grafiek de nutteloze „Y-as" weg te laten. Was b.v. $f(1) = 4$, dan tekenden zij het bijbehorende punt van de grafiek, door in het punt $x = 1$ van de X-as een lijnstuk met lengte 4 loodrecht op de X-as op te richten.

Ook het paraat hebben van een formule voor het bepalen van de uiterste waarde van een kwadratische functie kwam gelukkig nog maar zelden voor.

Zeer vele A-kandidaten en zelfs B-kandidaten waren er niet van op de hoogte, dat $\sqrt{a^2} = |a|$.

De B-kandidaten bleken nog steeds een ongemotiveerde voorkeur te hebben voor logaritmen met grondtal 10. Ze losten b.v.

${}^x\log 2 = 3$ als volgt op: $\dfrac{\log 2}{\log x} = 3 \rightarrow \log 2 = 3 \log x \rightarrow \log 2 = \log x^3 \rightarrow x^3 = 2$ en kwamen dan eerst (soms) tot de ontdekking, dat dit resultaat direct uit de gegeven vergelijking volgt.

Ofwel losten ze: ${}^x\log 2 = {}^4\log(2x - 1)$ op, door beide leden te herleiden tot logaritmen met grondtal 10 i.p.v. 4.

Het oplossen van een ongelijkheid dient streng gescheiden te blijven van het oplossen van een vergelijking. Een goed onderscheid moet worden gemaakt tussen de voegwoorden „en" en „of", zodat men b.v. niet tot de uitspraak komt: x is groter dan 5 *en* kleiner dan 2, terwijl *of* bedoeld is.

Met nadruk wijst de subcommissie erop, dat de hoofdzaken van de planimetrie als essentieel onderdeel van het meetkundeprogramma beschouwd moeten worden.

Enkele B-kandidaten hebben in de hoop geleefd een voldoend cijfer voor trigonometrie en analytische meetkunde te kunnen verkrijgen, door zich alleen te concentreren op de analytische meetkunde en de trigonometrie te verwaarlozen.

Het spreekt vanzelf, dat de subcommissie hier geen genoegen mee kan nemen. Naast kennis van de trigonometrie is ook vereist een goed inzicht in het oplossen van goniometrische vergelijkingen en ongelijkheden en in de goniometrische functies.

Bij de analytische meetkunde bleken vele kandidaten niet in staat te zijn, direct de richtingscoëfficiënt van een rechte, die door twee punten bepaald is, te vinden. Men moet onmiddellijk zien, dat de richtingscoëfficiënt van de rechte door b.v. (3,6) en (5,8) gelijk is aan $\dfrac{8-6}{5-3}$.

Het gemiddelde cijfer door de A-kandidaten behaald voor de stelkunde, bedraagt: 4,8 (5,0); voor de meetkunde: 4,7 (4,8). Voor de B-kandidaten bedragen deze cijfers voor de stelkunde 5,5 (5,0); voor de meetkunde 6,4 (5,0) en voor de trigonometrie en analytische meetkunde 5,6 (5,0).

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Notulen van de ledenvergadering op zaterdag 5 januari 1957 in Hotel „Noord-Brabant", Vredenburg, Utrecht.

Om 10.10 uur opende de voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin, de vergadering. In het bijzonder heette hij welkom: Dr. Monna, van het Departement van O., K. en W.; inspecteur Dr. Doornenbal; de heren Roodenburg en Koning, bestuursleden van het Genootschap; de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, de heren Hufferman en De Jong (van Wimecos), Dr. Capel (van Velines) en Dr. Van der Steen (van Velebi); de redactie-secretaris van Euclides, de heer Lenstra; het erelid Dr. Schrek; en de sprekers Dr. Ubbink en Prof. Dijksterhuis. Er waren berichten van verhindering binnengekomen van de inspecteurs Dr. De Boer, Mr. Dr. Westerveld en Van der Weyst, van de Chr. Groep, van Moga, van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O., en van de bestuursleden mejuffrouw Dr. Kramer en Willemse. De voorzitter deelde voor hen, die dit mocht zijn ontgaan, mee, dat de middagvergadering gehouden zou worden met de Groep Classici samen in het Jaarbeurs-restaurant. Daar zouden ook de inspecteurs Bartels en Dr. Van Buytenen aanwezig zijn.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden ongewijzigd goedgekeurd.

Als leden van de Kascommissie werden benoemd de heren Van den Brandhof en Dr. Capel.

Vervolgens hield de heer D. Leujes een korte inleiding over „De wiskunde-opgaven van het schriftelijk eindexamen gymnasium 1956". Hij had waardering voor de opgaven van de laatste jaren in het algemeen en 1956 vormde daarop geen uitzondering. Drukfouten en onduidelijkheden kwamen niet voor, de opgaven waren niet te moeilijk en ze vereisten weinig cijferwerk, terwijl ze toch niet beneden het gewenste peil bleven. Een bezwaar bij de algebra was volgens hem, dat het alle drie ongelijkheidsopgaven waren. Ook bij de meetkunde was een zekere eenzijdigheid te constateren. Inplaats van een trigonometrie-vraagstuk zou hij wel eens een goniometrie-vraagstuk wensen; maar misschien is dit in verband met de naam van het vak op het eindexamen niet mogelijk. Hij vond het prettig, dat de leerlingen bij algebra niet geplaagd worden met een kruising van grafische voorstellingen en analytische meetkunde, iets, dat bij de h.b.s.-eindexamens nog wel eens schijnt te gebeuren. Ook had hij waardering voor het derde vraagstuk bij Analytische Meetkunde, dat nu eens geen meetkundige-plaatsen-vraagstuk was.

Bij de discussie, waaraan deelnamen de heren Dr. Van Haselen, Bazendijk, Dr. Van der Steen, Slotboom, Dr. Doornenbal, Dr. Fuss, Dr. Dekker, Van Wely, Ir. De Roos en Dr. Vredenduin, bleek, dat men het in het algemeen wel met de inleider eens was. Ook bleek, dat niet iedereen op de hoogte was van de circulaire van de Inspectie, waarin wordt vermeld, wat op het schriftelijk eindexamen niet wordt gevraagd. Op een vraag hierover antwoordde Dr. Doornenbal, dat deze circulaire nog wel weer eens aan de scholen kan worden toegezonden.

De voorzitter stelde daarna eerst de rondvraag aan de orde.

Dr. Dekker achtte het wenselijk, dat bij invoering van het nieuwe leerplan de Statistiek alleen mondeling zal worden geexamineerd. De voorzitter antwoordde, dat dit ook de bedoeling is.

De heer Slotboom informeerde naar het tijdstip van invoering. Hierop zei de voorzitter, dat op het ogenblik alles wacht op de grote reorganisatieplannen van minister Cals.

Na de koffiepauze deelde de voorzitter mee, wat het eigenlijke hoofddoel van deze vergadering was. Het bestuur is namelijk bezorgd over het onderwijs in de Natuurwetenschappen in 5 alfa, in het bijzonder wat het chemisch-fysisch gedeelte betreft. Het meent, dat de docenten vaak te veel op de beta-opleiding ingesteld zijn en het ontbreekt hun meestal aan tijd om een geheel nieuwe alfa-didactiek op te zetten. Het bestuur zal in verband hiermee na afloop van de vergadering een werkgroep installeren, die tot taak krijgt: het nemen van maatregelen om te komen tot verbetering van bedoeld onderwijs. Leden van deze werkgroep zijn: Dr. M. J. Adriani, J. J. P. Boezeman, C. v. d. Brandhof, Dr. C. P. Koene, Dr. J. Rekveld en P. A. C. van Vianen. Dr. J. W. Schuyl, penningmeester van Liwenagel, zal als voorzitter optreden, terwijl ook de bestuursleden Dr. R. L. Krans en Dr. J. C. v. d. Steen ambtshalve bij de groep betrokken zullen zijn. De lezingen zijn min of meer bedoeld als instructie voor de werkgroep. Dr. Ubbink zal het probleem van de methodische, prof. Dijksterhuis van de historische kant belichten.

Na deze inleiding kreeg Dr. Ubbink het woord. Zijn lezing, „Filosofie en Natuurwetenschappen" wordt in Faraday gepubliceerd, zodat belangstellenden daarnaar worden verwezen.

Dr. Ubbink kwam tot de conclusie, dat de alfa's geen uittreksel van de beta-stof moet worden voorgezet. Ook verwierp hij een populaire uiteenzetting van misschien wel actuele, maar feitelijk zeer moeilijke kwesties. Hij pleitte voor een onderwijs, waarbij aan eenvoudige problemen wordt duidelijk gemaakt, hoe de methode van de moderne natuurkundige is.

Na deze lezing, die met grote belangstelling werd gevolgd, volgde een geanimeerde discussie, waaraan werd deelgenomen door de heren: Dr. Krans, prof. Dijksterhuis, Dr. Van der Steen, Dr. Dekker, Slotboom, Van Vianen en Dr. Vredenduin.

Om 12.45 uur schorste de voorzitter de vergadering.

Om 14.30 uur werd de middagvergadering geopend door Dr. Weiland, de voorzitter van de Groep Classici. Hij sprak er zijn vreugde over uit, dat Liwenagel en Classici deze middag tezamen waren.

De rede, die prof. Dijksterhuis daarna uitsprak, zal ook in „Faraday" gepubliceerd worden. De titel was: „Kan de Geschiedenis van de Natuurwetenschappen iets bijdragen tot het onderwijs in de Natuurwetenschappen in de A-afdeling van het Gymnasium?" Prof. Dijksterhuis kwam tot de conclusie, dat een historische behandeling van de Natuurwetenschappen in genoemde afdeling wel wenselijk is, maar dat de praktische uitvoerbaarheid twijfelachtig is.

Aan de discussie, die geleid werd door de voorzitter van Liwenagel, Dr. Vredenduin, werd deelgenomen door de heren: Dr. Van Pesch, Fresco, Dr. Ten Veldhuys, Dr. Van der Steen, Dr. Dekker, Dr. Van Duyvendijk, Aarts, Dr. Croon, Dr. Van der Veer en Schoonheid.

Het dankwoord van de voorzitter van Liwenagel aan prof. Dijksterhuis werd door een krachtig applaus van de vergadering onderstreept.

Nadat de heren Dr. Capel (namens Velines, Wimecos en Velebi), Roodenburg, Dr. Van Buytenen (mede namens de Inspecteurs Bartels en Dr. Doornenbal) en Dr. Monna voor de uitnodigingen hadden bedankt, sloot de voorzitter om 16.00 uur de vergadering.

De secretaris,

D. Leujes.

MEDEDELING VAN HET BESTUUR VAN „WIMECOS"

Door het bestuur werd de volgende circulaire verzonden aan de hem bekende auteurs en uitgevers van mechanicaleerboeken voor het V.H.M.O. in Nederland:

Door de Vereniging van leraren in natuur- en scheikunde (Velines) werd in 1955 een commissie ingesteld om een onderzoek te verrichten naar de wenselijkheid en de mogelijkheid om bij het onderwijs in de natuurkunde op de scholen voor V.H.M.O. het m.kg.s.A.-stelsel in te voeren.

In deze commissie hadden zitting 3 leden van Velines, 2 van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging en 2 leden van de Vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie (Wimecos).

Door genoemde commissie werd aan Velines een rapport aangeboden, dat gepubliceerd werd in „Faraday", 25, pag 131, en in „Euclides", 32, pag. 72. In dit rapport wijst de commissie erop dat door het „Bureau International des Poids et Mesures" en door de „International Technical Commission" het gebruik van m.kg.s. A.-eenheden sterk wordt aanbevolen.

Wat het onderwijs in het buitenland betreft, wijst de commissie erop, hoe in Duitsland reeds sedert 1938 het gerationaliseerde m.kg.s.A.-stelsel bij de bovenbouw van het M.O. werd ingevoerd; in 1954 verscheen in Engeland een rapport van een door de „Science Masters Association" ingestelde commissie, waarin sterk op invoering van dit stelsel werd aangedrongen. In Frankrijk werd al enige jaren geleden een begin van invoering gemaakt.

Op een vergadering van bijna alle auteurs van natuurkundeboeken bestemd voor het V.H.M.O. in Nederland op 11 augustus 1955 in Den Haag gehouden, verklaarde de overgrote meerderheid zich in principe bereid hun leerboeken voor de bovenbouw op het m.kg.s.A.-stelsel te baseren, als de wenselijkheid hiervan vaststond.

Inzake het mechanicaonderwijs bevat het rapport de volgende paragraaf: „Wat betreft het vak mechanica op de h.b.s.-B is de commissie van mening, dat de didactische voordelen, die aan het gebruik van het m.kg.s.A.-stelsel verbonden zijn, het uitsluitend gebruik van dit stelsel ook voor het vak mechanica wenselijk maken".

In verband met het bovenstaande zou het bestuur van Wimecos gaarne van U vernemen of U een nieuwe druk van Uw mechanicaleerboek(en) aan de wensen, neergelegd in dit rapport, zoudt willen aanpassen en eventuele bezwaren kenbaar zoudt willen maken aan de secretaris, Wilhelminalaan 19 — Zeist.

Het Bestuur van „Wimecos".

Ook heeft het bestuur van „WIMECOS" een schrijven aan het College van Inspecteurs gezonden om zijn hartelijke instemming te betuigen met het verzoek van de Vereniging van Leraren in Natuur- en Scheikunde (Velines) om steun te verkrijgen bij zijn pogingen tot invoering van het praktische eenhedenstelsel.

De secretaris van „Wimecos".